

## 1. La velocità limite

Abbiamo più volte accennato al fatto che la luce rappresenta la velocità limite per la propagazione delle interazioni. Sulla base di questo abbiamo, per esempio, proceduto a classificare i quadrintervalli dello spazio-tempo e la possibile relazione causale tra due eventi. Ma su quale evidenza sperimentale si basa l'affermazione che la velocità della luce nel vuoto è una velocità limite? Come possiamo affermare che essa rappresenta la massima velocità possibile per le particelle?

Il problema può essere posto in una forma particolarmente semplice. Supponiamo di applicare a una particella una forza costante nel tempo. Secondo la meccanica di Newton questo equivale ad imprimere un'accelerazione costante, per cui in tempi più o meno lunghi (dipenderà dalla massa inerziale), la particella può arrivare a qualunque velocità, anche molto superiore a quella della luce. Che cosa rende impossibile questo processo?

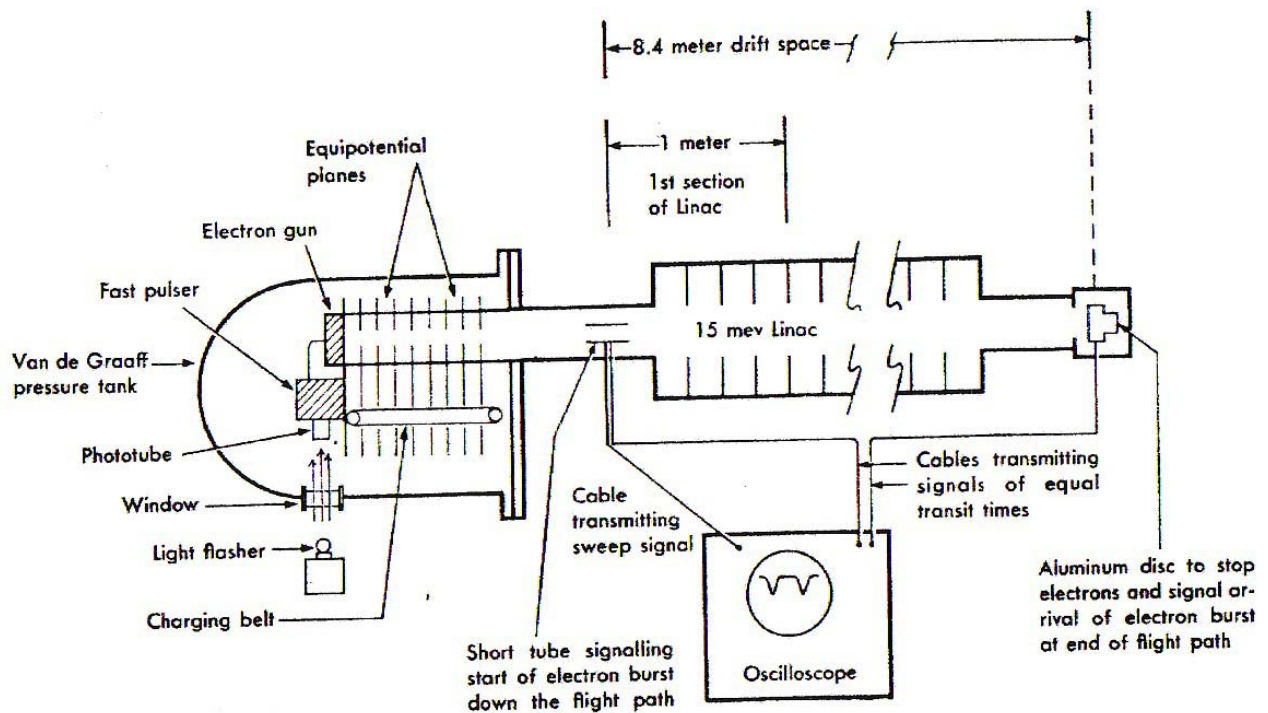
Anche se non disponiamo di una forza costante non è difficile calcolare il lavoro richiesto per portare un corpo dalla quiete a una certa velocità: esso è pari alla energia cinetica finale  $K=mv^2/2$ . Si tratta quindi di un lavoro finito qualunque sia la velocità che si considera. Perché non dovrebbe essere possibile realizzarlo?

Il modo migliore per risolvere il problema è provare direttamente ad accelerare particelle e verificare se le argomentazioni precedenti restano valide. Un dettagliato esperimento di questo tipo è stato realizzato al MIT dall'equipe di W. Bertozzi nel 1963-64. L'esperimento, più volte ripetuto in seguito anche con differenti modalità, ha fornito la risposta ai quesiti sopra sollevati.

L'idea dell'esperimento è quello di produrre impulsi di elettroni, accelerarli usando un apposito sistema acceleratore e misurarne la velocità. La scelta degli elettroni come particelle è dettata da due considerazioni: (i) la bassa massa inerziale ( $m=9.8*10^{-31}kg$ ), che consente di raggiungere alte energie cinetiche e quindi alte

velocità effettuando un limitato lavoro meccanico; (ii) la possibilità di produrre impulsi di elettroni e di controllarne le proprietà.

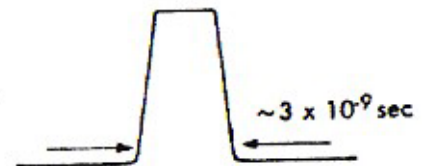
Lo schema dell'esperimento è riportato nella figura che riproduce quella del lavoro originale di Bertozzi



L'apparato sperimentale consiste di tre parti.

La prima è un generatore elettrostatico di Van de Graaff, cioè una macchina per produrre cariche elettriche, fornire loro un'energia cinetica fino a 1.5 MeV ( $1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ Joule}$ ) tramite lavoro elettrostatico e iniettarle all'interno di un acceleratore lineare (LINAC). Gli elettroni vengono prodotti a impulsi di breve durata.

La seconda parte è costituita dal LINAC, dentro cui viaggiano gli elettroni, che vengono ulteriormente accelerati da campi elettrici. Il LINAC è un tubo metallico al cui interno è fatto il vuoto e ancorato a sistemi elettrostatici che convertono l'energia potenziale elettrostatica della particella in energia cinetica.

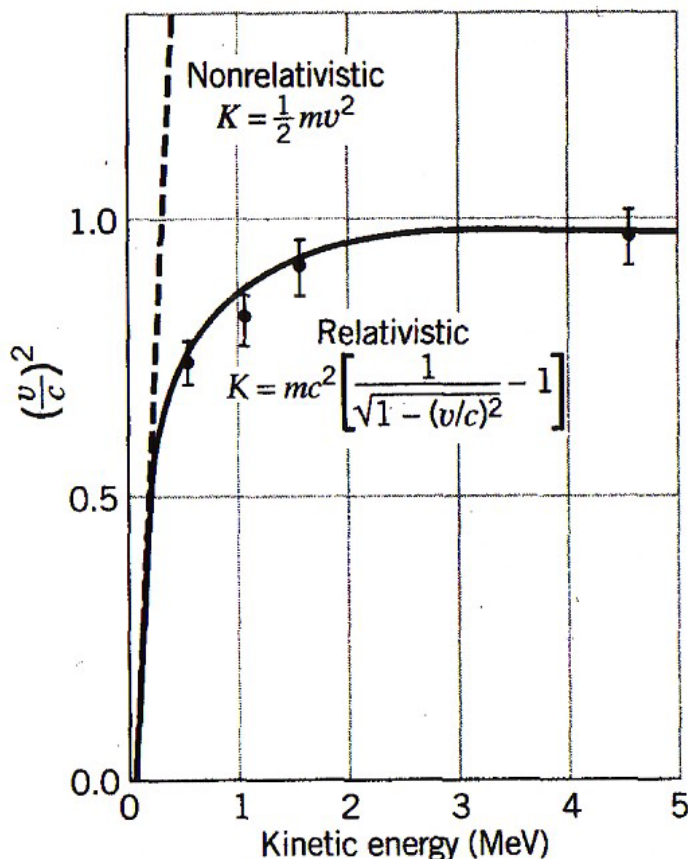


Alla estremità del LINAC gli elettroni vengono a collidere con un disco di alluminio, collegato agli apparati di misura.

Nell'esperimento è possibile misurare:

- L'energia cinetica degli elettroni che giungono al disco sia tramite il lavoro elettrostatico eseguito per accelerarli sia tramite la misura del calore ceduto dagli elettroni al disco metallico (l'energia cinetica degli elettroni viene ceduta al disco sotto forma di calore; pertanto misurandone la temperatura con una termocoppia opportunamente tarata si risale al riscaldamento e quindi alla energia degli elettroni incidenti).
- La velocità degli elettroni attraverso la misura del tempo di volo, cioè del tempo intercorso tra il loro ingresso nel LINAC e il loro arrivo alla estremità del disco. A questo scopo gli elettroni vengono fatti passare attraverso un piccolo tubo posto all'ingresso del LINAC e collegato con un oscilloscopio che ne visualizza il passaggio; anche il disco viene collegato allo stesso oscilloscopio in modo da visualizzare con un analogo segnale elettrico l'arrivo degli elettroni. Conoscendo la lunghezza del percorso e dividendola per il tempo tra i due

impulsi che pervengono all'oscilloscopio, si può risalire alla velocità dell'impulso di elettroni.



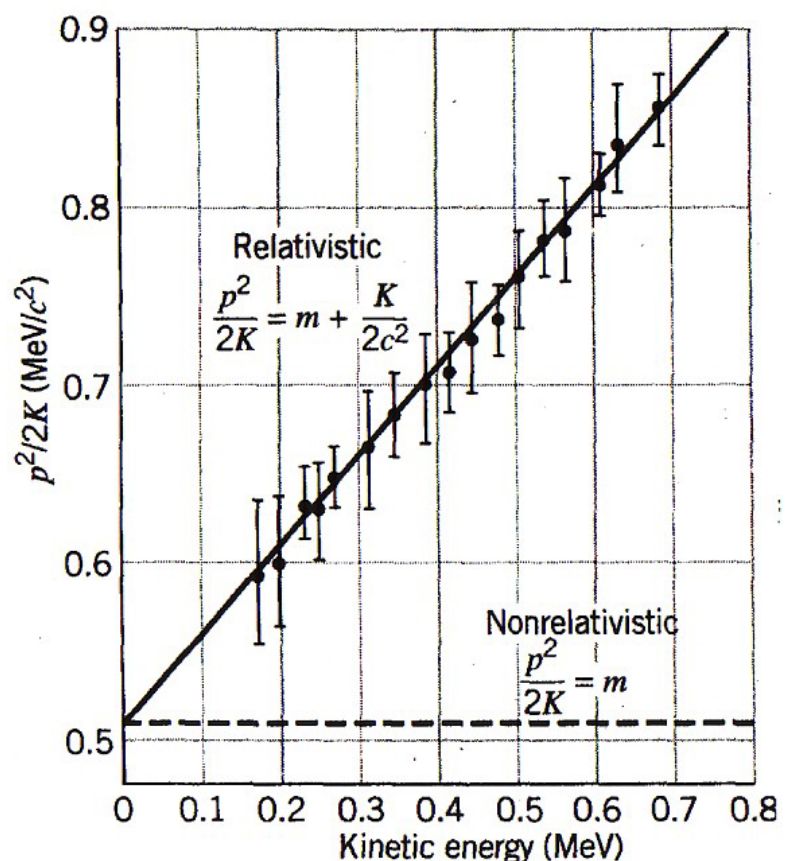
I risultati originali dell'esperimento sono riportati nella Figura, che confronta l'energia cinetica misurata con i valori misurati della velocità (per comodità di

lettura si riportano i valori del rapporto  $(v/c)^2$ ). La retta tratteggiata rappresenta l'andamento previsto dalla meccanica di Newton (non relativistica). La curva che unisce i punti sperimentali rappresenta la relazione tra energia cinetica e velocità

$$K = mc^2/(1-v^2/c^2)^{1/2} - mc^2$$

ove  $m$  è la massa dell'elettrone. Essa mostra una spettacolare deviazione della relazione tra energia e velocità quando  $K > 0.5$  MeV. L'aspetto che più colpisce di questi risultati è il fatto che per energie cinetiche superiore a 2 MeV l'aumento del lavoro compiuto non comporti un proporzionale aumento della velocità: al contrario questo diminuisce man mano che la velocità si avvicina a quella della luce, che appare come il limite asintotico delle velocità raggiungibili. Se si accetta come valida l'espressione di  $K$  che riproduce l'andamento sperimentale, si può concludere che occorre un lavoro infinito perché una particella raggiunga la velocità della luce.

Un aiuto a meglio comprendere i risultati può venire dall'analisi del comportamento della quantità di moto delle particelle in funzione dell'energia. Nel caso classico la quantità di moto  $p = mv$  è legata a  $K$  dalla  $K = p^2/2m$ . Ciò implica che il rapporto  $p^2/2K$  debba risultare costante e pari alla massa inerziale della particella. Nel caso degli elettroni, il valore di questo rapporto, se

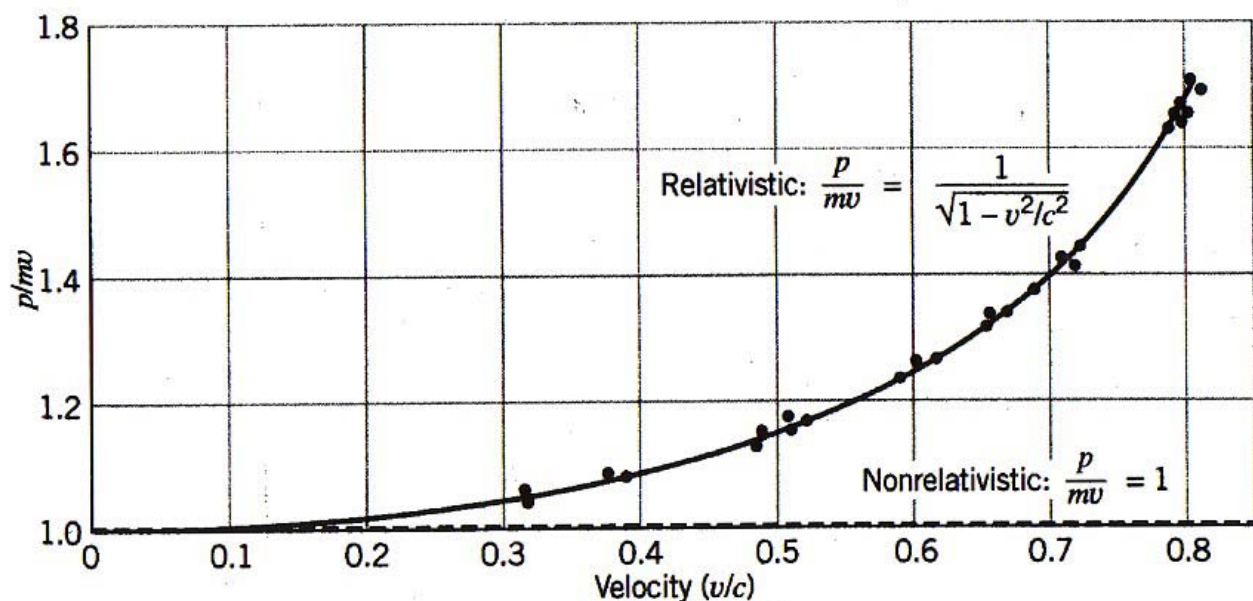


misurato in  $\text{MeV}/c^2$ , dovrebbe essere 0.512.

Si consideri infatti il prodotto

$$\begin{aligned} mc^2 &= 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 82 \cdot 10^{-15} \text{ J} \\ &= 8.2 \cdot 10^{-14} / (1.6 \cdot 10^{-13}) \text{ MeV} = 0.512 \text{ MeV} \end{aligned}$$

La curva sperimentale mostra che l'inerzia della particella così misurata si discosta dal valore costante misurato in fisica classica, tanto maggiormente quanto più elevata è la velocità. Essa cresce con la velocità, come è evidente anche dalla curva che riporta il rapporto del valore di  $p$  misurato dalla energia cinetica con quello classico, che si può determinare dalla misura della velocità.



L'unica conclusione che sembra coerente con i risultati sperimentali è che al crescere della velocità degli elettroni aumenti la loro massa inerziale, cioè la riluttanza di questi ad essere accelerati.

Per evidenziare questo comportamento in quel che segue definiamo **massa a riposo**  $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$  dell'elettrone la massa inerziale che viene misurata per questa particella quando  $v \ll c$ , cioè nelle condizioni della meccanica newtoniana. Questo ci consente di scrivere la quantità di moto nella forma

$$p = mv = m_0v / (1-v^2/c^2)^{1/2}$$

$$= m_0v\gamma(v)$$

(Si noti che nelle figure precedenti  $m$  indica la massa a riposo. Nel seguito indicheremo con  $m$  la massa inerziale variabile con la velocità).

I risultati dell'esperimento possono interpretarsi dicendo che l'energia cinetica  $K$  della particella è data come differenza di due energie

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

$$= m_0c^2(\gamma - 1)$$

Il primo termine può vedersi come l'energia di una particella libera in moto, mentre il secondo è l'energia associata a una particella libera in quiete, cioè in un sistema di riferimento con essa solidale. E' immediato osservare che nel limite di basse velocità questa espressione si riduce a quella adottata nella meccanica non relativistica. Se infatti  $v \ll c$  si ha, a primo ordine nel rapporto  $(v/c)^2$ , che

$$1/(1-v^2/c^2)^{1/2} = 1 + 1/2(v^2/c^2) + \dots$$

sostituendo nella espressione dell'energia cinetica si ottiene

$$K = m_0c^2 [1 + 1/2(v^2/c^2) + \dots] - m_0c^2$$

$$= m_0v^2/2 + \dots$$

che è appunto il risultato classico.

E' interessante osservare che Einstein è arrivato alla conclusione che la velocità della luce nel vuoto rappresenta la velocità limite

basandosi su semplici deduzioni dal principio di costanza della velocità della luce. Immaginiamo infatti che un corpo in moto con velocità  $u < c$  emetta un segnale luminoso. Sappiamo che questo segnale viaggia rispetto ad esso con velocità pari a  $c$ . Questa stessa velocità è misurata da un osservatore rispetto al quale il corpo si muove. Ora immaginiamo che il corpo venga accelerato a velocità ben superiore a  $c$ : esso sarebbe in grado di raggiungere l'impulso luminoso, contraddicendo l'ipotesi che la luce si allontana dal corpo sempre con la stessa velocità relativa.